Sous-calculabilités

Fabien Givors

Sous la direction de Gregory Lafitte
Escape - Lirmm - Université Montpellier II

25 janvier 2012
Semindoc

Plan

Plan

On ne dit pas désordre bien fondé. . .

mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle$

On ne dit pas désordre bien fondé…
mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$

On ne dit pas désordre bien fondé...

mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots \rangle$

On ne dit pas désordre bien fondé…
mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \dots < 1 < 3 < 5 < \dots \rangle = \omega + \omega = \omega.2$

On ne dit pas désordre bien fondé...

mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots \rangle = \omega + \omega = \omega.2$
- $\omega.\omega = \omega^2$

On ne dit pas désordre bien fondé...

mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots \rangle = \omega + \omega = \omega.2$
- $\omega.\omega = \omega^2$
- $\omega^\omega = \omega \uparrow\uparrow 2$

On ne dit pas désordre bien fondé…

mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots \rangle = \omega + \omega = \omega.2$
- $\omega.\omega = \omega^2$
- $\omega^\omega = \omega \uparrow\uparrow 2$
- $\omega \uparrow\uparrow \omega = \epsilon_0$

On ne dit pas désordre bien fondé…

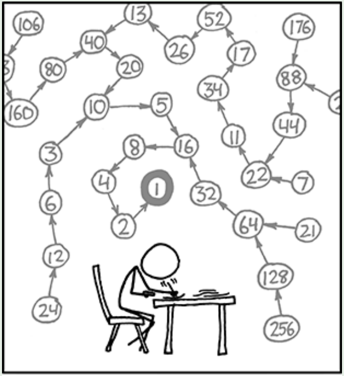
mais des ordinaux.

Vers l'infini et au delà !

- $\langle 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots \rangle = \omega$
- $\langle 0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots \rangle = \omega + \omega = \omega.2$
- $\omega.\omega = \omega^2$
- $\omega^\omega = \omega \uparrow\uparrow 2$
- $\omega \uparrow\uparrow \omega = \epsilon_0$
- $\epsilon_0 < \epsilon_0 + 1$

On ne dit pas déterminiser…
mais une fin assurée.

La conjecture de Collatz



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

Plan

Les fonctions calculables,

des fonctions naturelles. . .

- Des fonctions sur les entiers. . .

$$\varphi \quad : \mathbb{N}$$

Les fonctions calculables,

des fonctions naturelles. . .

- Des fonctions sur les entiers,
- vers les entiers. . .

$$\varphi \quad : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

- Des fonctions sur les entiers,
- vers les entiers,
- codées par des entiers.

$$\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

On ne dit pas introduction caustique,

mais éléments de base.

À partir de fonctions basiques :

les fonctions de base de l'arithmétique

- fonction constante nulle, $\mathbf{0} : n \mapsto 0$;

On ne dit pas introduction caustique,
mais éléments de base.

À partir de fonctions basiques :

les fonctions de base de l'arithmétique

- fonction constante nulle, $\mathbf{0} : n \mapsto 0$;
- fonction successeur, $\mathbf{s} : n \mapsto n+1$.

On ne dit pas introduction caustique,
mais éléments de base.

À partir de fonctions basiques :

les fonctions de base de l'arithmétique

- fonction constante nulle, $\mathbf{0} : n \mapsto 0$;
- fonction successeur, $\mathbf{s} : n \mapsto n + 1$.

un opérateur conditionnel

$$\mathbf{si} : (f, g) \mapsto \left(x, n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } x = 0; \\ g(n) & \text{sinon.} \end{cases} \right)$$

On ne dit pas carte de re-pairage,
mais projection de Cantor.

des fonctions de codage

- pairage : $\langle ., . \rangle$,
- et projections π_1, π_2 :

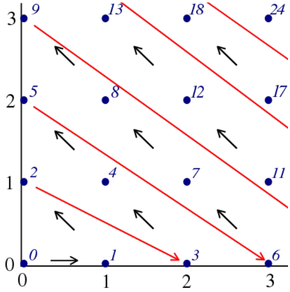
$$\pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_i$$

On ne dit pas carte de re-pairage,
mais projection de Cantor.

des fonctions de codage

- pairage : $\langle ., . \rangle$,
- et projections π_1, π_2 :

$$\pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) = x_i$$



Par composition à partir de fonctions déjà construites :

- $\mathbf{2} = \mathbf{s} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{0}$
- $f = x \mapsto \mathbf{si}(\mathbf{s}, \mathbf{42})(\pi_1(x), \pi_2(x))$

Finir, oui. . .
mais d'une fin lente.

Récursion primitive. Limité, mais bien fondé (sur ω) :

$$f(n, f(n-1, f(\dots, f(1, f(0, x)))\dots))$$

Finir, oui...
mais d'une fin lente.

Sous-calculabilités

Fabien Givors

Récursion primitive. Limité, mais bien fondé (sur ω) :

$$f(n, f(n-1, f(\ldots, f(1, f(0, x)))\ldots))$$

Application

- $\text{plus}(m, n) = \mathbf{s}^{(n)}(m)$
- $\log_2(n)$, $\text{pgcd}(n, m)$, ...

Récursion primitive. Limité, mais bien fondé (sur ω) :

$$f(n, f(n-1, f(\ldots, f(1, f(0, x)))\ldots))$$

Application

- $\mathrm{plus}(m, n) = \mathbf{s}^{(n)}(m)$
- $\log_2(n)$, $\mathrm{pgcd}(n, m)$, ...

Il en manque ! Ex : Ackermann

$$A(m, n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0 \end{cases}$$

Schéma μ, un schéma de récursion non borné.

- Permet de calculer toutes les fonctions calculables
- Ne prouve pas la bonne terminaison des fonctions

Plan

Analyse ordinale d'une théorie

$$|T| = \mu o \in \mathcal{O}, T \nvdash o \in \mathcal{O}$$

Analyse ordinale d'une théorie

$$|T| = \mu o \in \mathcal{O}, T \nvdash o \in \mathcal{O}$$

Arithmétique de Peano

$$|\mathbf{PA}| = \epsilon_0$$

Analyse ordinale d'une théorie

$$|T| = \mu o \in \mathcal{O}, T \nvdash o \in \mathcal{O}$$

Arithmétique de Peano

$$|\mathbf{PA}| = \epsilon_0$$

Séquences de Goodstein

- $3 = 2^1 + 1$
- $3^1 + 1 - 1 = 3^1$
- $4^1 - 1 = 3,\ 3 - 1 = 2,\ 2 - 1 = 1,\ 1 - 1 = 0$

Plan

Résumé

Regardons tout ça de haut. . .

Résumé

Regardons tout ça de haut...

Analyse ordinale d'une théorie

$o \in \mathcal{O}$

Résumé

Regardons tout ça de haut. . .

Analyse ordinale d'une théorie

$o \in \mathcal{O}$

Schéma de récursion associé à cet ordinal

$$f(5, f(1, f(72, f(2, f(0, x)))))$$

Résumé

Regardons tout ça de haut. . .

Analyse ordinale d'une théorie

$o \in \mathcal{O}$

Schéma de récursion associé à cet ordinal

$$f(5, f(1, f(72, f(2, f(0, x)))))$$

Classe de fonction associée

π_1, π_2, composition, etc.

Plan

Classes de fonctions

Des fonctions qui croissent plus ou moins vite

- Fonctions primitive récursive

plus lentes qu'Ackermann

Classes de fonctions

Des fonctions qui croissent plus ou moins vite

- Fonctions primitive récursive

  plus lentes qu'Ackermann

- Fonctions ϵ_0-récursives

  plus lentes que Goodstein

Classes de fonctions

Des fonctions qui croissent plus ou moins vite

- Fonctions primitive récursive

plus lentes qu'Ackermann

- Fonctions ϵ_0-récursives

plus lentes que Goodstein

- Etc.

Ensembles énumérables et fonctions partielles

associés à chaque classe.

Ensembles énumérables

On considère f injective, et on regarde

$$W_f = \{f(0), f(1), \dots\}$$

Ensembles énumérables et fonctions partielles

associés à chaque classe.

Ensembles énumérables

On considère f injective, et on regarde

$$W_f = \{f(0), f(1), \dots\}$$

Fonctions partielles

On considère g la fonction de graphe W_f.

Merci de votre attention !