Forcing et degrés Turing

Parce que le forcing n'a pas encore dit son dernier mot

Fabien GIVORS

Sous la direction de Gregory Lafitte
LIF - Université de Provence

11 juin 2009

Plan

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS
UNIVERSITÉ DE PROVENCE Aix-Marseille I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Plan

1. Problématique
2. Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**
3. Degrés incomparables et forcing
4. Degrés r.e. et forcing
5. Perspectives

Problématique

Notions de calculabilité (1/2)

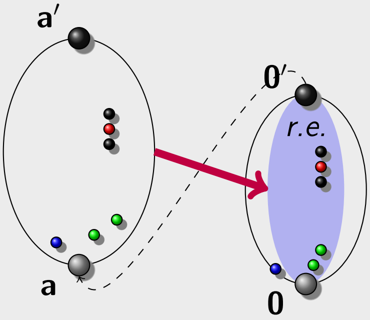
Les degrés Turing

- Fonctions *p.p.r.* : $(\varphi_e)_{e\in\mathbb{N}}$, $\forall e \in \mathbb{N}, W_e = dom(\varphi_e)$
- Réduction Turing : $A \leqslant_T B \Leftrightarrow A$ récursif en B
- Degrés : $(\mathfrak{P}(\mathbb{N})/\equiv_T) = \mathbf{D}$
- Treillis : $(\mathbf{D}, \leqslant_T)$
- Incomparables : $(\mathbf{a} \not\leqslant_T \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \not\leqslant_T \mathbf{a})$
- *Saut* de A : $\mathbf{K}^A = \{e \mid \varphi_e^A(e)\downarrow\}$
- $deg(A) = \mathbf{a}$, $deg(\mathbf{K}^A) = \mathbf{a}'$
- $\mathbf{a}$ *r.e.* $\Leftrightarrow \exists e, W_e \in \mathbf{a}$

Problématique

Résultats de calculabilité (2/2)

Structure des degrés Turing



- Structure : densité, paires minimales, degrés minimaux, homogénéité, ...
- Et pour les degrés *r.e.* ?
- Problème de **Post** : degrés intermédiaires, indécidabilité et arrêt ?
- **Friedberg-Muchnik**

Plan

1. Problématique
2. Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**
3. Degrés incomparables et forcing
4. Degrés r.e. et forcing
5. Perspectives

Les incomparables faciles avec $\neg$HC

La théorie des ensembles rend tout plus simple.

Ingrédients

- Le nombre de réductions Turing est $\aleph_0$.
- Le nombre de prédécesseurs d'un degré Turing est $\aleph_0$.
- Il y a $2^{\aleph_0}$ degrés.

Lemme

- *Ordre total sur* $> \aleph_1$ *degrés ?*
- $\Rightarrow \exists$ *degré avec* $\geqslant \aleph_1$ *prédécesseurs*
- *Contradiction. Pas d'ordre total sur* $X \subseteq \mathbf{D}$ *où* $|X| > \aleph_1$.

Les incomparables faciles avec $\neg$HC

Les incomparables nouveaux sont arrivés.

Rappel

$\neg$**HC** : $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$

Théorème

- *Soit M un modèle de* **ZF** $+ \neg$**HC**.
- *Il y a* $2^{\aleph_0}$ $(\geqslant \aleph_2)$ *degrés.*
- *Pas d'ordre total sur* $X \subseteq \mathbf{D}$ *où* $|X| > \aleph_1$.
- *il y a donc des degrés incomparables dans M ;*
- $\exists X, Y, \forall e, \left(X \not\leqslant_T \varphi_e^Y \wedge Y \not\leqslant_T \varphi_e^X\right)$ *énoncé* Σ_1^1 $(\subseteq \Sigma_2^1)$
- *Shoenfield :* $P \in \Sigma_2^1$ *vrai dans M de* **ZF** $\Rightarrow$ *vrai dans* **ZF**
- $\exists$ *incomparables dans tout modèle de* **ZF**.

$\neg$HC ?

- Comment $\neg$**HC** rend la preuve plus simple ?
- On peut montrer d'autres choses aussi simplement ?
- Et à partir d'autres propositions ensemblistes ?
- Et pour les degrés *r.e.* ?

Plan

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

UNIVERSITÉ DE PROVENCE Aix-Marseille I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Vous avez dit $\neg$**HC** ?

Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

Analyse

- Pourquoi la démonstration est si simple ?
- En fait, la méthode pour obtenir $\neg$**HC** crée des degrés incomparables.
- Une méthode, forcing avec $\mathbf{P} = Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, \mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

UNIVERSITÉ DE PROVENCE Aix-Marseille I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Des degrés incomparables grâce au forcing

Le forcing en deux mots

Pour faire du forcing, il faut...

Un *modèle M*

C'est notre point de départ, le résultat obtenu en fin de compte ne sera consistant que si ce modèle existe.

Une *notion de forcing* $(\mathbf{P}, \leqslant) \in M$

- $\mathbf{P}$ ensemble ordonné partiellement par $\leqslant$;
- $\mathbb{1}$ plus grand élément de $(\mathbf{P}, \leqslant)$.

Des degrés incomparables grâce au forcing

Notre forcing en deux mots

Dans notre cas, on considère...

Un *modèle M*

On prend M un modèle transitif dénombrable de **ZF**.

Une *notion de forcing* $(\mathbf{P}, \leqslant) \in M$

- $\mathbf{P}$ est $Fn(\kappa \times \mathbb{N}, \mathbf{2})$ où κ est un cardinal ; [a]
- $\leqslant$ est l'inclusion inverse : $\supseteq$;
- $\mathbb{1}$ est la fonction nulle part définie ($= \max(\mathbf{P})$)

a. $Fn(I, J)$ est l'ensemble des fonctions de I dans J à support fini

Des degrés incomparables grâce au forcing

Qu'est-ce que *forcer* ?

Densité et filtre

$D \subseteq \mathbf{P}$ dense dans $\mathbf{P} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{P}, \exists q \in D, q \leqslant p$

$U \sqsubseteq \mathbf{P}$ filtre si $U \neq \emptyset \wedge \forall p, q \in U, \exists r \in U, (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$

Générique

$\exists G$ filtre, $\forall D$ M-dense dans $\mathbf{P}$, $G \cap D \neq \emptyset$

Objectifs

- Construire $M[G]$, $G \in M[G]$ mais $G \notin M$.
- S'assurer que $M[G]$ soit encore un modèle, ...
- S'assurer que les objets créés aient les propriétés voulues.

Des degrés incomparables grâce au forcing

Qu'est-ce que forcer dans notre cas ?

Rajouter κ incomparables

- **Incomp.** : $D_{\alpha,\beta,e} = \{p \in \mathbf{P} \mid \exists n, \varphi_e(p(\alpha, n)) \neq p(\beta, n)\}$
- **Totales** : $D'_{\alpha,n} = \{p \in \mathbf{P} \mid p(\alpha, n) \text{ définie}\}$
- $f = \cup G$
- $\forall \gamma \in \kappa, f_\gamma : n \mapsto f(\gamma, n)$
- On force : $\begin{cases} \forall \gamma \in \kappa, f_\gamma \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \\ \forall \alpha, \beta \in \kappa, \forall e \in \mathbb{N}, f_\beta \nleq_T \varphi_e^{f_\alpha} \end{cases}$

Remarques

- *Les f_γ sont les réels de Cohen*
- $\mathbf{P}$ *préserve les cardinalités.*

Des degrés incomparables grâce au forcing

Shoenfield absolument !

Transposition du résultat

- existence dans $M[G]$
- $\exists X, Y, \forall e, (X \not\leq_T \varphi_e^Y \wedge Y \not\leq_T \varphi_e^X)$ énoncé $\Sigma_1^1 \, (\subseteq \Sigma_2^1)$
- Shoenfield : c'est absolu donc vrai dans tout modèle de **ZF**.

Retour sur ¬**HC**

Modèle avec ¬**HC** : déjà des incomparables.

Plan

1. Problématique
2. Les incomparables faciles avec $\neg$**HC**
3. Degrés incomparables et forcing
4. Degrés r.e. et forcing
5. Perspectives

Université Nice SOPHIA ANTIPOLIS

UNIVERSITÉ DE PROVENCE Aix-Marseille I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Degrés r.e. et forcing

« Problème de Post, on a tous à y gagner. »

Problème de Post

- Degré intermédiaire *r.e.* entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{0}'$.
- Degrés incomparables *r.e.*

Résolution

- Méthode de priorité (**Friedberg-Muchnik**).
- Comment transformer le forcing précédent pour les degrés *r.e.* ?

Degrés r.e. et forcing

Le forcing *à la Maass* (1/4) — Résumé

Forcing et calculabilité *r.e.*

- *A priori*, pas vraiment de lien
- Denses difficiles à manipuler, trop nombreux
- Générique non *r.e.*
- Anciens incomparables créés non *r.e.*

Solution de Maass

- Changer de modèles
- Restreindre les denses
- Changer l'ordre partiel
- Construire des *r.e.*-génériques (des « génériques » *r.e.*).

Degrés r.e. et forcing

Le forcing *à la Maass* (2/4) — Nouveaux modèles

Le modèle de départ

M : Ensembles héréditairement finis clos par fonctions *r.p.*

Le modèle d'arrivée

N : Ensembles héréditairement finis clos par fonctions *p.p.r.*

Motivations ?

- **ZF** trop riche.
- Facile d'obtenir une énumération.
- *r.p.* sont totales.
- Pas de degrés $> \mathbf{0}$ parmi les *r.p.*

Degrés r.e. et forcing

Le forcing *à la Maass* (3/4) — *Notion de forcing* $(\mathbf{P}, \leq)$

La *notion de forcing*

- Ordre partiel plus complexe :

$$\mathbf{P} = \left\{ \langle G_0, \dots, G_k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 0, \\ (G_i)_{i \leq k} \text{ croissante pour } \subseteq \\ \forall i \leq k, G_i \subseteq i \\ \forall i \leq j \leq k \Rightarrow G_j \cap t^j(i) = G_{t^j(i)} \end{array} \right\} \cup \{\langle\rangle\}$$

Où les G_i sont des ensembles héréditairement finis.

Les denses

- denses de M
- avec témoin *r.p.* (moins, témoin utile pour construction).

Degrés r.e. et forcing

Le forcing *à la Maass* (4/4) — *The End*

r.e.-Génériques

- Intersectant des denses *r.p.*
- Énumération *récursive* (codée dans le générique) de *degré intermédiaire*.

Transformer une construction classique en construction à la Maass ?

- Restriction sur les denses
- Complexification de l'ordre partiel

Plan

État des lieux

Apports

- On a isolé la transformation de Maass. Généralisation ?
- Forcing pour $\neg$**HC** ajoute **lui-même** des incomparables.
- Gros objets de la théorie des ensembles $\Rightarrow$ preuves simples

- Il reste $2\frac{1}{2}$ mois de stage.

Perspectives

Pour la suite...

- Les *r.e.*-génériques sont *low* ($\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}'$). Liens avec K-trivialité [a] ?
- Transposition *r.e.* des forcings pour les degrés globaux. (*e.g.*, paires minimales — pas toujours possible)
- Que forcent ces forcings à partir d'un modèle de **ZF** ? Modèle de $\neg$**HC** $\Rightarrow$ incomparables. Modèle de $\exists\kappa \Rightarrow$ *autre structure sur* **D** ?

a. Travaux d'André Nies, liés à la complexité de Kolmogorov

Merci de votre attention !